

## 4 Dimensionamento degli elementi costruttivi

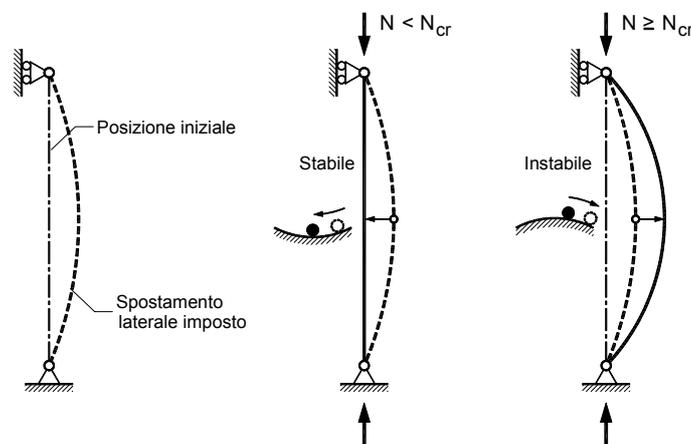
### 4.1 Elementi singoli semplici

#### 4.1.1 Pilastrì compressi e presso inflessi

##### 4.1.1.1 Pilastrì soggetti a carico di punta

La resistenza spesso piú vincolante per un elemento compresso è quella legata non tanto ad un criterio di *resistenza della sezione* (illustrato nel capitolo 2), ma piuttosto ad un *criterio di stabilità dell'equilibrio*.

L'equilibrio di un sistema elastico come quello di figura 4.1 può essere di tipo *stabile* oppure *instabile* a seconda che il carico assiale agente sia, rispettivamente, minore, oppure non minore di un parametro detto *carico critico*. Nel caso di equilibrio stabile ( $N < N_{cr}$ ), se al detto sistema viene imposto temporaneamente una piccola deviazione dalla posizione iniziale, il sistema tende a ritornare nella posizione iniziale; nel caso di equilibrio instabile ( $N \geq N_{cr}$ ), a seguito della perturbazione, il sistema si allontana definitivamente dalla condizione di equilibrio.



**Figura 4.1** Stabilità di forma per un'asta soggetta a carico di punta.

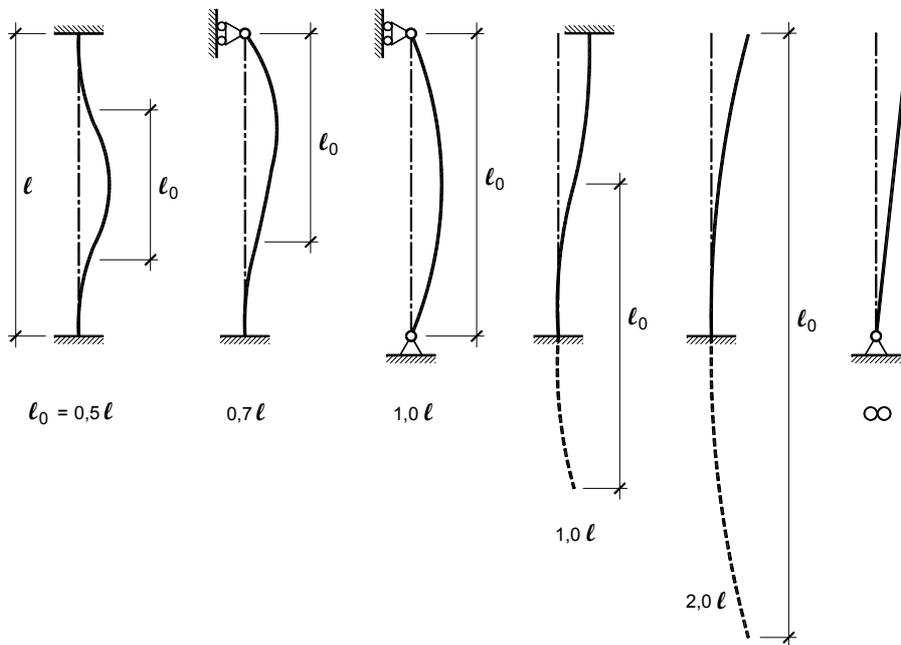
Nei problemi di stabilità il carico critico viene determinato considerando le equazioni di equilibrio in una configurazione deformata dell'elemento, configurazione che è legata alle condizioni di vincolo del sistema.

Il problema della stabilità dei sistemi elastici è stato formulato e risolto per la prima volta da Eulero nel XVIII secolo proprio per il caso della colonna compressa di figura 4.1.

L'espressione generale euleriana del carico critico per l'asta compressa è la seguente:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l_0^2} \quad (4.1)$$

dove la lunghezza libera di inflessione  $l_0$  varia al variare delle condizioni di vincolo come illustrato in figura 4.2.



**Figura 4.2** Lunghezze libere di inflessione per un'asta soggetta a carico di punta per diverse condizioni di vincolo. La lunghezza libera corrisponde alla distanza fra 2 punti consecutivi di flesso della deformata critica.

Spesso è più conveniente considerare l'espressione dello sforzo critico dividendo ambo i membri della relazione di Eulero per l'area della sezione:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{A \cdot l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (4.2)$$

dove

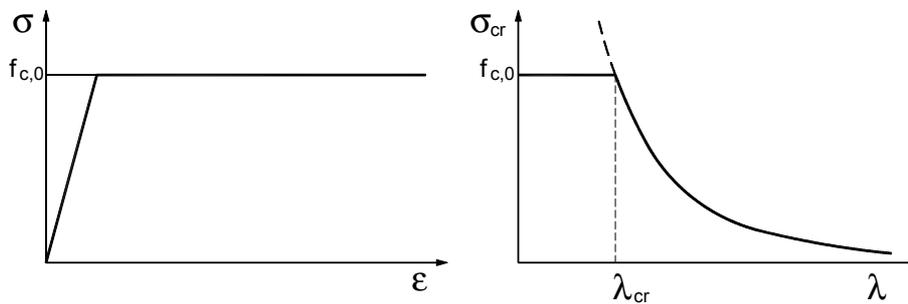
$i$  è il raggio giratore di inerzia nel piano di sbandamento dell'asta e che, nel caso comune di sezione rettangolare di altezza  $h$  (nel piano di inflessione), pari a

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}} \quad (4.3)$$

$\lambda$  è la snellezza dell'asta, pari a

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \tag{4.4}$$

Se si rappresenta graficamente l'espressione (4.2), si ottiene l'iperbole di Eulero, cioè una curva che rappresenta  $\sigma_{cr}$  in funzione della snellezza dell'elemento. Tale curva è valida nell'ipotesi di materiale dal comportamento indefinitamente elastico lineare, mentre considerando il comportamento reale del materiale è possibile, per determinate geometrie, che si superi la resistenza a compressione semplice del materiale prima che si instabilizzi l'asta: per questo deve essere modificata come nella figura 4.3, per tenere in considerazione il comportamento reale del materiale.



**Figura 4.3** Il comportamento del materiale determina la modifica della curva di Eulero.

Si deve quindi imporre la condizione di crisi della colonna per raggiungimento delle tensioni massime  $f_{c,0}$  in una sezione

$$\sigma = f_{c,0} \tag{4.5}$$

Eguagliando la relazione (4.2) con la relazione per il carico critico (4.5), ed esplicitando il termine della snellezza, si ottiene il valore di *snellezza critica*, cioè un parametro che rappresenta il discriminare tra *aste tozze* e *aste snelle*

$$\lambda_{cr} = \pi \sqrt{\frac{E}{f_{c,0}}} \tag{4.6}$$

Per  $\lambda \leq \lambda_{cr}$  (asta tozza) risulta più stringente la verifica di resistenza, mentre per  $\lambda > \lambda_{cr}$  (asta snella) risulta più stringente la verifica di instabilità.

La verifica a collasso della colonna può essere quindi riscritta nel modo seguente

$$\sigma_c \leq k_c \cdot f_{c,0,d} \tag{4.7}$$

dove

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{per } \lambda \leq \lambda_{cr} \\ \frac{1}{\lambda_{rel}^2} & \text{per } \lambda \geq \lambda_{cr} \end{cases} \tag{4.8}$$

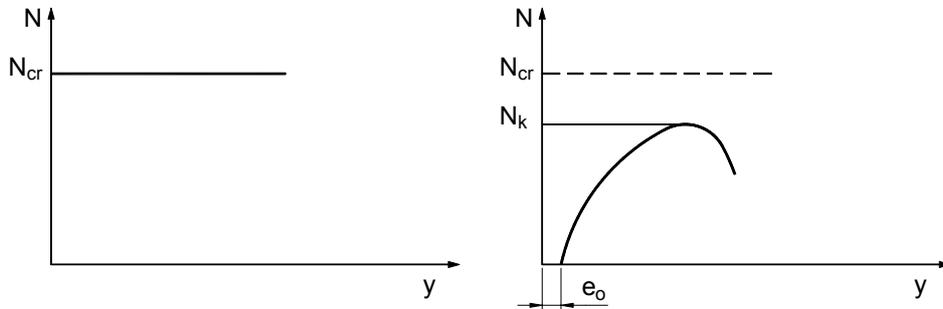
Per aste tozze  $k_c$  assume un valore unitario (si ritrova quindi la verifica di resistenza riportata nel capitolo 2), mentre per aste snelle il valore di  $k_c$  può essere facilmente ricavato dalla relazione di Eulero, tramite la seguente definizione di *snellezza relativa*  $\lambda_{rel}$ :

$$\lambda_{rel} = \frac{\lambda}{\lambda_{cr}} = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0}}{E}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 \cdot f_{c,0}}{\pi^2 \cdot E}} = \sqrt{\frac{f_{c,0}}{\sigma_{cr}}} \quad (4.9)$$

Da essa, esplicitando  $\sigma_{cr}$ , si ritrova:

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{\lambda_{rel}^2} \cdot f_{c,0} \quad (4.10)$$

ovvero la seconda espressione di (4.8).



**Figura 4.4** Comportamento ideale e reale dell'asta compressa.

La curva di instabilità rappresentata dalle relazioni (4.8), descrive un comportamento ideale dell'asta (instabilità euleriana), non tenendo in considerazione il comportamento non lineare del materiale, e della presenza di imperfezioni che si osservano nei casi reali. Nella teoria euleriana l'instabilità è raggiunta per *biforcazione dell'equilibrio* (si ha cioè un carico critico che rappresenta il discriminante tra le condizioni di equilibrio stabile ed instabile). Nel comportamento reale, a causa delle imperfezioni geometriche e meccaniche del sistema (per esempio un'imperfezione iniziale  $e_0$  dell'asta), l'instabilità si raggiunge per un carico ultimo  $N_k$  inferiore a  $N_{cr}$  (figura 4.4).

Al fine di determinare un'espressione del carico critico che tenga in considerazione il comportamento reale del materiale, si illustra di seguito l'analisi di stabilità di un'asta in configurazione deformata, con la presenza di una *imperfezione iniziale*.

Si faccia riferimento alla figura 4.5, dove l'imperfezione geometrica iniziale ipotizzata ha andamento sinusoidale con eccentricità massima pari a  $e_0$ :

$$e(x) = e_0 \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{l} \quad (4.11)$$

L'analisi del secondo ordine impone di ricercare l'equilibrio nella configurazione deformata, quindi l'equazione della linea elastica deve essere riscritta come segue:

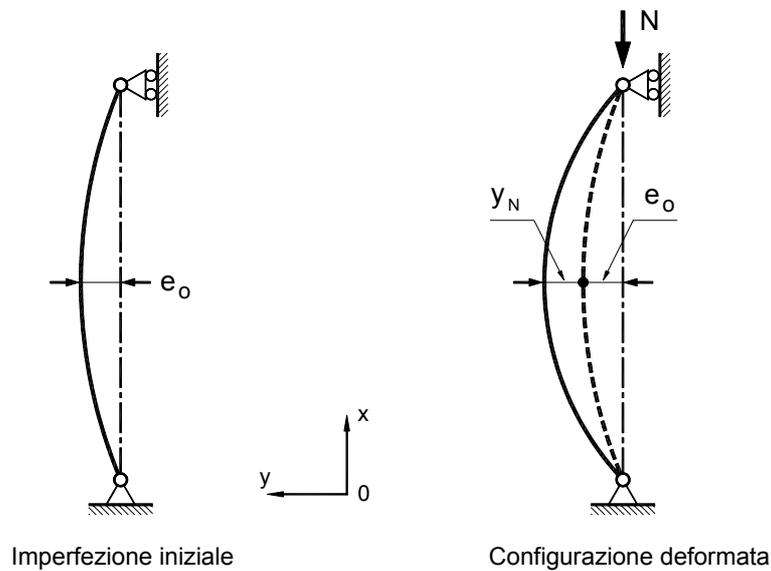
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot J} = -\frac{N}{E \cdot J} \cdot \left( y(x) + e_0 \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{l} \right) \quad (4.12)$$

Integrando, si ottiene l'espressione della deformazione massima in mezzzeria pari a

$$y_{\max} = (y_N + e_0) = e_0 \cdot \alpha \tag{4.13}$$

dove  $\alpha$  è il *coefficiente di amplificazione* che vale (si veda, per esempio, Belluzzi 1941)

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \tag{4.14}$$



**Figura 4.5** Asta di Eulero con imperfezione iniziale e sua configurazione deformata.

Si definisca un coefficiente  $k_{rel}$  come segue:

$$k_{rel} = \frac{1}{\lambda_{rel}^2} \tag{4.15}$$

ricordando la definizione di  $\lambda_{rel}$  si può esprimere  $k_{rel}$  come rapporto tra la sollecitazione critica euleriana e la tensione massima di rottura  $f_{c,0}$ :

$$k_{rel} = \frac{1}{\lambda_{rel}^2} = \frac{\sigma_{cr}}{f_{c,0}} \tag{4.16}$$

moltiplicando e dividendo per  $k_{rel}$ , il coefficiente di amplificazione diventa quindi:

$$\alpha = \frac{k_{rel}}{k_{rel} - \frac{\sigma_{c,0}}{f_{c,0}}} \tag{4.17}$$

La tensione di flessione massima in mezzzeria si può scrivere come:

$$\sigma_m = \frac{N \cdot y_{\max}}{W} = \frac{N \cdot e_0}{W} \cdot \alpha = \frac{N \cdot e_0}{W} \cdot \frac{k_{\text{rel}}}{k_{\text{rel}} - \frac{\sigma_{c,0}}{f_{c,0}}} \quad (4.18)$$

Andando a valutare l'espressione di combinazione per sollecitazioni di compressione e flessione, nell'ipotesi di comportamento elastico-lineare:

$$\frac{\sigma_{c,0}}{f_{c,0}} + \frac{\sigma_m}{f_m} = 1 \quad (4.19)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\sigma_{c,0}}{f_{c,0}} \cdot \left( 1 + \frac{A \cdot e_0}{W} \cdot \frac{f_{c,0}}{f_m} \cdot \frac{k_{\text{rel}}}{k_{\text{rel}} - \frac{\sigma_{c,0}}{f_{c,0}}} \right) = 1 \quad (4.20)$$

Per i pilastri sottoposti a solo sforzo normale si vuole giungere ad una formula di verifica del tipo di quella a compressione semplice, con un coefficiente  $k_c$  che tenga in considerazione anche gli effetti d'instabilità:

$$\sigma_{c,0} \leq k_c \cdot f_{c,0} \quad (4.21)$$

Il fattore  $k_c = \sigma_{c,0} / f_{c,0}$  può essere quindi inserito nella (4.20), ottenendo

$$k_c \cdot \left( 1 + \frac{A \cdot e_0}{W} \cdot \frac{f_{c,0}}{f_m} \cdot \frac{k_{\text{rel}}}{k_{\text{rel}} - k_c} \right) = 1 \quad (4.22)$$

esplicitando  $k_c$  si perviene quindi ad un'equazione di secondo grado

$$k_c^2 + k_c \cdot \left( 1 + \left( 1 + \frac{A \cdot e_0}{W} \cdot \frac{f_{c,0}}{f_m} \right) \cdot k_{\text{rel}} \right) + k_{\text{rel}} = 0 \quad (4.23)$$

Risolviendo tale equazione si può arrivare al seguente valore per  $k_c$ , in funzione di un parametro  $k$

$$k_c = \frac{k - \sqrt{k^2 - \lambda_{\text{rel}}^2}}{\lambda_{\text{rel}}^2} \quad (4.24)$$

Tramite un semplice passaggio l'espressione di  $k_c$  può essere riscritta nella forma in cui viene solitamente riportata nei diversi documenti normativi

$$k_c = \frac{k - \sqrt{k^2 - \lambda_{\text{rel}}^2}}{\lambda_{\text{rel}}^2} \cdot \frac{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{\text{rel}}^2}}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{\text{rel}}^2}} = \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{\text{rel}}^2}} \quad (4.25)$$

La definizione del parametro  $k$  deriva dalla trattazione analitica appena esposta

$$k = 0,5 \times \left( 1 + \frac{e_0}{r} \cdot \frac{f_{c,0}}{f_m} + \lambda_{\text{rel}}^2 \right) = 0,5 \times \left( 1 + \eta \cdot \lambda \cdot \frac{f_{c,0}}{f_m} + \lambda_{\text{rel}}^2 \right) \quad (4.26)$$

dove  $r = W/A$  è la semidiagonale del nocciolo centrale di inerzia, ed avendo posto il valore di imperfezione massima  $e_0$  in funzione della snellezza della trave tramite la seguente relazione:

$$e_0 = \eta \cdot \lambda \cdot r \quad (4.27)$$

In versioni precedenti della normativa europea EN 1995:2004 si prescrivevano per  $\eta$  valori pari a 0,006 e 0,004 rispettivamente per il legno massiccio e per il legno lamellare (ciò equivaleva ad ipotizzare una eccentricità iniziale della colonna pari a circa  $l/300$  per il legno massiccio e a circa  $l/500$  per il legno lamellare).

Nelle versioni più recenti dei differenti documenti normativi si sono utilizzate per il parametro  $k$  espressioni modificate come segue:

$$k = 0,5 \left( 1 + \beta_c (\lambda_{\text{rel}} - \bar{\lambda}_{\text{rel}}) + \lambda_{\text{rel}}^2 \right) \quad \text{per } \lambda_{\text{rel}} > \bar{\lambda}_{\text{rel}} \quad (4.28)$$

in cui  $\bar{\lambda}_{\text{rel}}$  è posto pari a 0,5 per il documento Nicole, e 0,3 per EN 1995:2004 e DIN 1052:2004. Si adotta  $\beta_c = 0,2$  nel caso di legno massiccio e  $\beta_c = 0,1$  per il legno lamellare, qualora la membratura soddisfi adeguati limiti di rettilineità. Nel caso di elementi singoli compressi stabilizzati da vincoli intermedi, la deviazione iniziale dalla rettilineità tra i supporti intermedi dovrà essere contenuta entro  $1/500$  della distanza tra i vincoli intermedi nel caso di elementi di legno lamellare incollato, ed entro  $1/300$  per tutti gli elementi di legno massiccio. Nel caso in cui si abbia  $\lambda_{\text{rel},z} \leq \bar{\lambda}_{\text{rel}}$  si può assumere  $k_c = 1$ .

Nonostante l'analogia formale, le curve di instabilità descritte dalla relazione (4.28) derivano da metodi alternativi a quello analitico appena descritto, basati sostanzialmente su *simulazioni numeriche* in cui i pilastri sono stati schematizzati tenendo conto delle proprietà del materiale e delle imperfezioni geometriche osservate in colonne reali. Nelle simulazioni, ad ogni pilastro sono state assegnate in maniera casuale le proprietà di rigidità e di resistenza nonché i valori dell'eccentricità iniziale: per un vasto numero di pilastri aventi stessa snellezza e classe di resistenza differenti si ottiene una distribuzione di valori di carico ultimo e si può determinare il valore caratteristico, ottenendo quindi un punto della curva d'instabilità. Inoltre il calcolo del carico ultimo è stato effettuato tenendo in considerazione le deformazioni plastiche del legno soggetto a compressione parallela alle fibre: questo approccio consente di ottenere curve di instabilità meno conservative e più aderenti alla realtà sperimentale rispetto a quelle ottenute in precedenza (Blass, 1995). Un confronto tra le diverse curve di instabilità, che descrivono l'influenza della snellezza sulla capacità portante di pilastri doppiamente incernierati, è riportato in figura 4.6.

#### • Approccio normativo

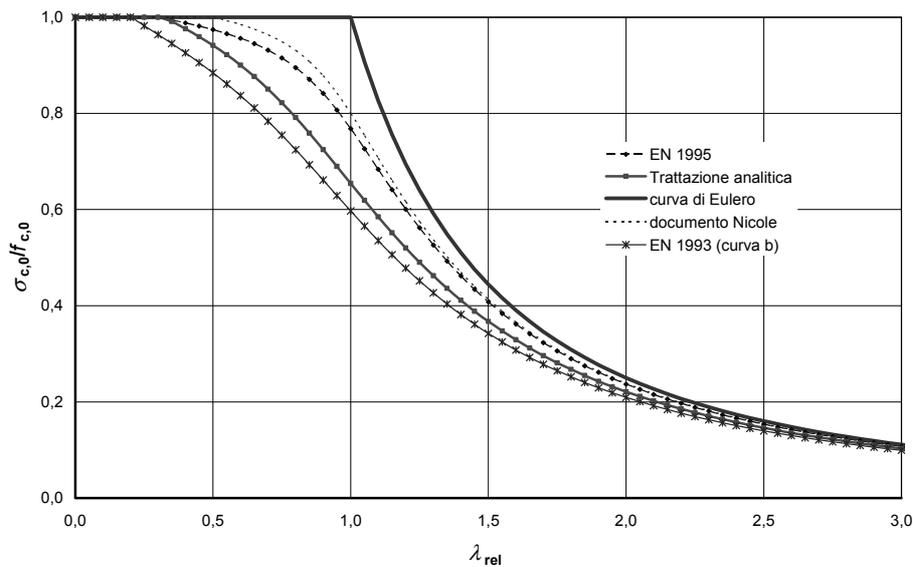
Considerando un'asta sottoposta a sforzo normale (vedi figura 4.7), le verifiche di stabilità devono essere compiute sia con riferimento alla possibile inflessione nel piano forte  $xz$  della sezione del pilastro (flessione intorno all'asse  $y$ ), sia alla flessione nel piano debole  $xy$  (flessione intorno all'asse  $z$ ). Occorre infatti notare, come si evince dalla figura 4.7, che entrambe le verifiche risultano necessarie, in considerazione dei possibili diversi gradi di vincolo, e quindi delle diverse lunghezze libere di inflessioni, nei due piani.

Nel caso di *inflessione nel piano debole della sezione* (flessione intorno all'asse  $z$ ), la snellezza relativa viene determinata con un'espressione derivata dalla (4.10):

$$\lambda_{\text{rel},z} = \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{\sigma_{c,\text{crit},z}}} \quad (4.29)$$

essendo  $f_{c,0,k}$  il valore caratteristico a compressione parallela alle fibre, mentre  $\sigma_{c,crit,z}$  è il carico critico euleriano per inflessione nel piano  $xy$  che, in accordo con la (4.2), i diversi documenti normativi pongono pari a

$$\sigma_{c,crit,z} = \frac{\pi^2 E_{0,05}}{\lambda_z^2} \quad (4.30)$$



**Figura 4.6** Confronto tra la curva di instabilità di Eulero, l'espressione (4.26) derivata analiticamente, le curve di instabilità date da diverse normative per il legno lamellare, la curva b) per l'acciaio secondo EN 1993-1-1.

Si noti che, trattandosi di un parametro collegato al *carico ultimo* per instabilità, in questo caso per il modulo elastico parallelo alle fibre  $E_{0,05}$  si adotta il frattile al 5° percentile e non, come avviene per esempio per il calcolo della freccia, il valore medio.

La snellezza  $\lambda_z$  dell'elemento rispetto alla inflessione intorno all'asse  $z$  (inflessione in direzione  $y$ ), si determina attraverso la seguente relazione:

$$\lambda_z = \frac{l_{0,z}}{i_z} \quad (4.31)$$

con

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} \quad (4.32)$$

dove

$l_{0,z}$  è la lunghezza di libera inflessione attorno all'asse  $z$  (*inflessione nella direzione y*);

$A$  è l'area della sezione trasversale dell'asta;

$J_z$  è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse  $z$ .

Nel caso di trave con sezione rettangolare  $b \times h$  (si vedi figura 4.7) si ha:

$$i_z = \frac{b}{\sqrt{12}} \quad (4.33)$$

di conseguenza l'espressione per la snellezza  $\lambda_z$  è pari, in accordo con (4.31), a:

$$\lambda_z = \frac{l_{0,z}}{i_z} = \frac{l_{0,z}}{b} \cdot \sqrt{12} \quad (4.34)$$

da cui la seguente espressione della snellezza relativa  $\lambda_{rel,z}$ :

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\sqrt{12}}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} \cdot \frac{l_{0,z}}{b} \quad (4.35)$$

Nell'ipotesi di legno lamellare di conifera si può adottare, a favore di sicurezza, il rapporto minimo  $E_{0,05} / f_{c,0,k} \approx 382,8$ , trovato tra le classi di resistenza in EN 1194:2002, ottenendo la seguente espressione semplificata per il calcolo della snellezza relativa  $\lambda_{rel,z}$ :

$$\lambda_{rel,z} = 0,057 \frac{l_{0,z}}{b} \quad (4.36)$$

In maniera analoga si determina, nel caso di *inflessione nel piano forte della sezione* (flessione intorno all'asse  $y$ , inflessione in direzione  $z$ ), la snellezza relativa  $\lambda_{rel,y}$ . Nel caso di trave con sezione rettangolare  $b \times h$ , e nell'ipotesi di  $E_{0,05} / f_{c,0,k} \approx 382,8$ , si può ottenere la seguente espressione semplificata per il calcolo della snellezza relativa  $\lambda_{rel,y}$

$$\lambda_{rel,y} = 0,057 \frac{l_{0,y}}{h} \quad (4.37)$$

Nel caso di verifica di stabilità di una singola membrature all'interno di una struttura lignea, i diversi documenti normativi (EN 1995:2004, DIN 1052:2004, documento Nicole), prescrivono che la condizione di stabilità debba essere verificata con il *metodo della colonna modello*. La verifica di instabilità si effettua tramite un calcolo a compressione, con una formulazione analoga alla (4.21), utilizzando, per la definizione di  $k_c$ , una lunghezza libera di inflessione che tenga in considerazione le reali condizioni di vincolo della struttura (si veda la figura 4.2). Nella maggior parte dei casi pratici si possono utilizzare le formule che saranno illustrate nel capitolo 5 (tabella 5.1).

#### 4.1.1.2 Pilastri pressoinflessi

Nel caso più generale di asta pressoinflessa sottoposta a sforzo normale e flessione nei piani  $xy$  e  $xz$  (figura 4.7), in mancanza di valutazioni approfondite sull'effetto combinato di instabilità assiale e flessotorsionale, la normativa europea EN 1995:2004 impone una semplice formulazione di interazione di tipo lineare.

Con riferimento ad un elemento sottoposto a sforzo normale e flessione nei piani  $xy$  e  $xz$  (figura 4.7), devono essere verificate le seguenti condizioni

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (4.38)$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (4.39)$$

dove

$\sigma_{c,0,d}$  è la tensione di compressione derivante dalla forza normale;  
 $\sigma_{m,z,d}$  e  $\sigma_{m,y,d}$  sono le tensioni di flessione dovute, rispettivamente, al carico  $q_y$  nel piano  $xy$  e al carico  $q_z$  nel piano  $xz$ ;  
 $k_{c,z}$  e  $k_{c,y}$  sono i coefficienti di tensione critica;  
 $k_m$  è il coefficiente già introdotto per la verifica flessionale della sezione (vedi capitolo 2).

Queste formulazioni lineari sono dal lato della sicurezza: diversi Autori hanno osservato che, a causa del contributo della non linearità del materiale in compressione, possono condurre ad una eccessiva sottostima della reale prestazione dell'elemento.

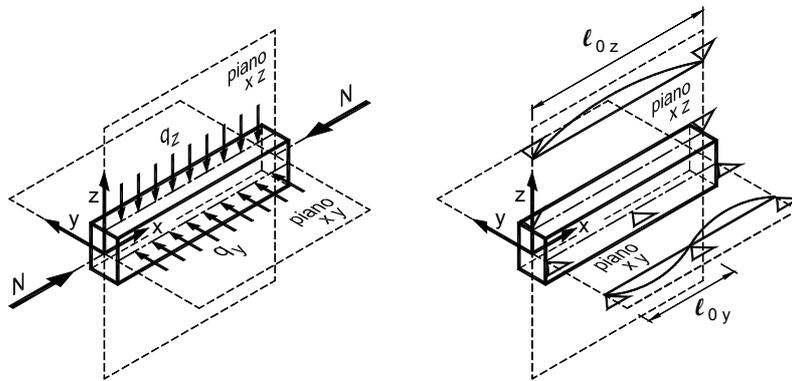


Figura 4.7 Sistema di riferimento utilizzato per l'asta presso-inflessa.

## 4.1.2 Travi inflesse e presso inflesse

### 4.1.2.1 Travi inflesse

Le sezioni degli elementi strutturali in legno presentano spesso un'altezza molto maggiore della larghezza per garantire un'adeguata capacità portante e rigidità a flessione nel piano, generalmente, verticale. Per tale ragione, spesso, risulta importante effettuare considerazioni sulla possibilità di instabilità della trave per flessione piana, ovvero occorre cautelarsi nei confronti dello *svergolamento della trave* nel piano debole. Questo si sviluppa qualora la forza di compressione che nasce in una parte dell'elemento (tipicamente quella superiore, nel caso di membrature in semplice appoggio caricate verticalmente verso il basso) provochi uno sbandamento delle sezioni di tipo roto-traslazionale: questo fenomeno comporta un'inflessione laterale su un fianco della trave ed una rotazione intorno all'asse longitudinale  $x$  dell'elemento (vedi figura 4.8), anche se l'elemento risulta caricato solo nel piano verticale.

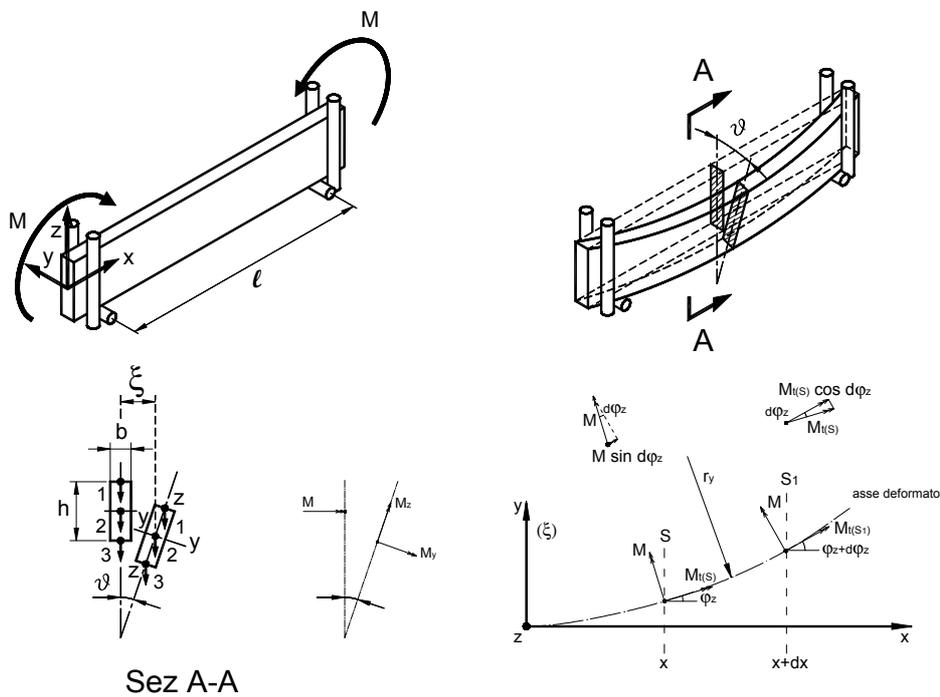
Volendo ora trovare, analogamente a quanto già fatto per il pilastro soggetto a carico di punta, un'espressione per il *momento critico* che provoca tale svergolamento, ci si riferisca al caso semplice di *trave semplicemente inflessa*, soggetta a *momento flettente costante*  $M$  con piano di sollecitazione verticale (piano  $z-x$  di figura 4.8). Tale problema può essere trattato secondo la teoria elastica, imponendo l'equilibrio nella configurazione deformata. Si osservino, nella medesima figura 4.8, le condizioni di due distinte sezioni lungo l'asse

della trave,  $S(x)$  e  $S_1(x+dx)$ . Nella sezione  $S(x)$  sono dunque presenti momenti  $M$  (piano di sollecitazione verticale  $z-x$ ) e momenti torcenti  $M_t$ , nella sezione  $S_1$  (inclinazione  $d\varphi_z$  rispetto alla sezione  $S$ ) si ha sempre la presenza di  $M$  mentre per  $M_t(S_1)$  (ipotizzando piccolo l'angolo  $d\varphi_z$ ):

$$M_{t(S_1)} = M_{t(S)} \cdot \cos d\varphi_z + M \cdot \sin d\varphi_z \cong M_{t(S)} + M \cdot d\varphi_z \quad (4.40)$$

In definitiva si può anche scrivere, visto che le sezioni sono posizionate a distanza  $dx$

$$\frac{dM_t}{dx} = M \cdot \frac{d\varphi_z}{dx} \quad (4.41)$$



**Figura 4.8** Instabilità flesso-torsionale di trave.

Poiché l'espressione della curvatura nel piano orizzontale  $x-y$  è

$$d\varphi_z/dx = 1/r_z = -d^2\xi/dx^2$$

dalla precedente equazione si ricava la seguente:

$$\frac{dM_t}{dx} = -M \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2} \quad (4.42)$$

Avendo chiamato  $\vartheta$  l'angolo che definisce la rotazione "torsionale" della sezione, si può ricavare il momento flettente  $M_z$  (piano debole di sezione) come componente del momento flettente  $M$ :

$$M_z = M \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = M \cdot \sin \vartheta \cong M \cdot \vartheta \quad (4.43)$$

L'espressione meccanica della curvatura nel piano  $x$ - $y$  (orizzontale) e l'equazione differenziale per la trave sollecitata torsionalmente così si scrivono:

$$B_z \cdot \frac{d^2 \xi}{dx^2} = -M_z \cong -M \cdot \vartheta \quad (4.44)$$

$$C_t \cdot \frac{d\vartheta}{dx} = -M_t \text{ da cui: } C_t \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = -\frac{dM_t}{dx} \text{ e } C_t \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = M \cdot \frac{d^2 \xi}{dx^2} \quad (4.45)$$

essendo  $C_t$  e  $B_z$ , rispettivamente, le rigidezze torsionale e flessionale (nel piano debole):

$$C_t = G J_t \quad (4.46)$$

$$B_z = E J_z \quad (4.47)$$

dove si sono indicati con  $J_t$  il momento d'inerzia torsionale e con  $J_z$  il momento d'inerzia della sezione nel piano debole.

Moltiplicando ora membro a membro la (4.44) e la (4.45), ed eliminando il fattore non nullo  $d^2 \xi / dx^2$ , si ottiene dunque la seguente equazione differenziale (conosciuta come equazione di Prandtl-Michell, 1899):

$$B_z C_t \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = -M^2 \vartheta \quad (4.48)$$

Osservando che, per il caso di figura 4.8 di trave soggetta a momento costante, il rapporto

$$\frac{M^2}{B_z C_t} = \alpha^2 \quad (4.49)$$

risulta evidentemente costante con  $x$ , si può riscrivere l'equazione (4.48) nella forma:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = -\alpha^2 \vartheta \quad (4.50)$$

che presenta il seguente integrale generale

$$\vartheta = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x \quad (4.51)$$

Nella figura 4.8 le condizioni al contorno si individuano facilmente osservando che, in corrispondenza del vincolo di estremità, si ha rotazione libera con asse vettore  $Y$ , rotazione libera con asse vettore  $Z$ , rotazione bloccata con asse vettore  $X$ , impedimento alla traslazione lungo  $y$  e lungo  $z$  (*vincolo torsionale*).

Applicando quindi le condizioni di angolo di torsione nullo  $\vartheta = 0$  al contorno (cioè per  $x = 0$  e  $x = l$ ), si ottiene:

$$C_1 \sin \alpha l = 0 \quad (4.52)$$

$$C_2 = 0 \quad (4.53)$$

e quindi la condizione di esistenza di una configurazione deformata, oltre a quella banale, porta a:

$$\alpha l = n \pi \quad (4.54)$$

e, per  $n = 1$ :

$$\alpha = \frac{\pi}{l} \quad (4.55)$$

Ricordando la posizione (4.49) si ottiene dunque la seguente condizione di momento flettente critico:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{B_z C_t} \quad (4.56)$$

Nella letteratura scientifica (Timoschenko, Belluzzi ecc.) si ritrovano le soluzioni elastiche per la determinazione del momento critico per condizioni di carico e di vincolo diverse dal caso di trave su appoggi torsionali e soggetta a momento costante. Nella discussione di tali casi particolari, è tuttavia invalsa la pratica di mantenere la forma dell'equazione di Prandtl-Michell:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l_{ef}} \sqrt{E \cdot J_z \cdot G \cdot J_t} \quad (4.57)$$

facendo variare il valore della lunghezza efficace  $l_{ef}$  in funzione delle condizioni di carico e di vincolo. Per esempio, nel caso di trave con vincoli torsionali agli appoggi si ha che  $l_{ef} = l$  per un momento costante (equazione di Prandtl-Michell), con carico distribuito  $l_{ef} = 0,9 l$ , con carico concentrato in mezzeria  $l_{ef} = 0,75 l$ .

Occorre sottolineare la sostanziale diversità tra  $l_{ef}$  e la lunghezza libera di inflessione del caso dell'instabilità per carico di punta, proprio per non incorrere in banali errori nel calcolo di  $l_{ef}$  per condizioni di vincolo e di carico diversi da quelli di figura 4.8 (si veda la tabella 4.2 riportata nel seguito).

Nel caso di asta prismatica a sezione rettangolare il momento d'inerzia nel piano debole  $J_z$  ed il momento torcente  $J_t$  porgono rispettivamente i seguenti valori:

$$J_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} \quad (4.58)$$

$$J_t = \frac{b^3 \cdot h}{3 \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \frac{b}{h}\right)} \quad (4.59)$$

è quindi immediato ricavare l'espressione generale del momento critico per aste a sezione rettangolare:

$$M_{cr} = \frac{\pi \sqrt{E \cdot G} \cdot \frac{b^3 \cdot h}{6}}{l_{ef} \sqrt{1 + 0,6 \cdot \frac{b}{h}}} \cong \frac{\pi \sqrt{E \cdot G} \cdot \frac{b^3 \cdot h}{6}}{l_{ef}} \quad (4.60)$$

con una approssimazione ingegneristicamente accettabile per rapporti  $h/b > 4$ .

Volendo esprimere questa relazione in termini tensionali si ottiene quindi l'espressione generale della tensione critica a flessione nel piano verticale:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{6 \cdot M_{cf}}{b \cdot h^2} \cong \frac{\pi}{l_{ef}} \cdot \frac{b^2}{h} \cdot \sqrt{E \cdot G} \quad (4.61)$$

Un'ultima osservazione rimane da fare al riguardo della sollecitazione statica presente. Il caso teorico svolto mediante la trattazione di Prandtl-Michell riguarda una trave soggetta, sulla luce  $l$ , a momento flettente costante  $M$  con piano di sollecitazione verticale. Evidentemente ci si può riportare a tale caso teorico anche in presenza di sollecitazioni o disposizioni di carico diverse. A questo riguardo si deve anche evidenziare che le disposizioni di carico, in sezione, indicate in figura 4.8 sono diversamente influenti sul fenomeno, potendo dare un contributo positivo (pos. 1), negativo (pos. 3) o ininfluenza (pos. 2) al fenomeno di instabilizzazione.

Nella letteratura prima citata si possono trovare le soluzioni elastiche al problema del momento critico, che tengono in considerazione del contributo stabilizzante, instabilizzante o indifferente dato dalla posizione in sezione del carico applicato. Anche in questo caso è possibile mantenere invariata la forma dell'equazione di Prandtl-Michell, agendo solamente sui valori della lunghezza efficace  $l_{ef}$ .

• **Approcci normativi**

Al fine di garantire la stabilità flessotorsionale delle membrature semplicemente inflesse, i diversi documenti normativi impongono la verifica della seguente disuguaglianza:

$$\sigma_{m,d} \leq k_{crit} f_{m,d} \quad (4.62)$$

dove  $k_{crit}$  è un coefficiente che considera la riduzione di resistenza dovuta allo sbandamento laterale, pari quindi a:

$$k_{crit} = \frac{\sigma_{m,crit}}{f_{m,d}} \quad (4.63)$$

dove  $\sigma_{m,crit}$  si determina con la teoria di Prandtl-Michell.

Si definisce la snellezza relativa a flessione  $\lambda_{rel,m}$  in maniera analoga a quanto fatto nel precedente paragrafo per l'instabilità di colonna, e quindi pari a:

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{f_{m,k} / \sigma_{m,crit}} \quad (4.64)$$

ottenendo:

$$k_{crit} = \frac{\sigma_{m,crit}}{f_{m,k}} = \frac{1}{\lambda_{rel,m}^2} \quad (4.65)$$

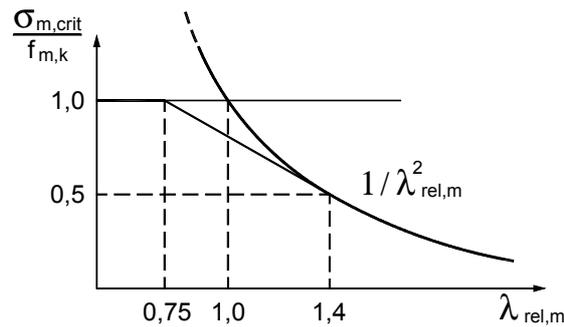
I diversi documenti normativi presi in considerazione propongono tale espressione per  $\sigma_{m,crit} / f_{m,k} \leq 0,5$ , e quindi per  $\lambda_{rel,m} > 1,4$ .

Per valori di  $\lambda_{rel,m} < 0,75$  si è dimostrato sperimentalmente che il carico di collasso per flessione precede quello per instabilità: nell'intervallo  $0,75 < \lambda_{rel,m} < 1,4$  si utilizza un'interpolazione lineare.

In definitiva il valore di  $k_{crit}$ , nel caso di elementi con deviazione laterale iniziale rispetto alla sagoma rettilinea contenuta nei limiti introdotti al punto precedente per i pilastri, risulta quindi pari a:

$$k_{crit} = \begin{cases} 1 & \text{per } \lambda_{rel,m} \leq 0,75 \\ 1,56 - 0,75\lambda_{rel,m} & \text{per } 0,75 < \lambda_{rel,m} \leq 1,4 \\ 1/\lambda_{rel,m}^2 & \text{per } 1,4 < \lambda_{rel,m} \end{cases} \quad (4.66)$$

Qualora lo sbandamento laterale del lato compresso sia impedito per tutta la sua lunghezza, così come la rotazione torsionale agli appoggi,  $k_{crit}$  si può assumere unitario.



**Figura 4.9** Curva di instabilizzazione flessotorsionale secondo diversi documenti normativi.

Per determinare il valore della tensione di flessione critica  $\sigma_{m,crit}$ , si fa riferimento all'espressione generale di Prandtl - Michell (4.57) per il momento critico, utilizzando i valori di rigidità corrispondenti al frattile 5%. Per membrature con sezioni simmetriche la formulazione generale elastica porge l'espressione:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{M_{y,crit}}{W_y} = \frac{\pi \cdot \sqrt{E_{0,05} \cdot J_z \cdot G_{0,05} \cdot J_{tor}}}{l_{ef} \cdot W_y} \quad (4.67)$$

dove:

- $E_{0,05}$  è il valore del modulo elastico parallelo alle fibre, riferito al frattile 5%;
- $G_{05}$  è il valore del modulo di taglio parallelo alle fibre, riferito al frattile 5%;
- $J_z$  è il momento d'inerzia della sezione attorno all'asse debole  $z$ ;
- $J_{tor}$  è il momento d'inerzia torsionale;
- $l_{ef}$  è la lunghezza cosiddetta efficace della trave, come precedentemente definita;
- $W_y$  è il modulo di resistenza della sezione attorno all'asse forte  $y$ .

Nel caso particolare di asta prismatica a sezione rettangolare, si ottiene quindi:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{\pi b^2}{l_{ef} h} \sqrt{E_{0,05} G_{05}} \cong \frac{\pi b^2 E_{0,05}}{l_{ef} h} \sqrt{\frac{G_{mean}}{E_{0,mean}}} \quad (4.68)$$

dove:

- $b$  è la base della trave;
- $h$  è l'altezza della trave;
- $G_{mean}$  è il valore del modulo elastico tangenziale medio;
- $E_{0,mean}$  è il valore del modulo elastico medio parallelo alle fibre.

Poiché il valore  $G_{05}$  non è dato nei profili caratteristici (vedi capitolo 1), si ipotizza che il valore del rapporto  $G_{05}/G_{\text{mean}}$  sia identico a quello  $E_{0,05}/E_{\text{mean}}$ .

Ricordando la definizione di snellezza relativa a flessione  $\lambda_{\text{rel},m}$  possiamo quindi scrivere:

$$\lambda_{\text{rel},m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,\text{cr}}}} = \sqrt{\frac{l_{\text{ef}} \cdot h}{\pi b^2} \frac{f_{m,k}}{E_{0,05}}} \sqrt{\frac{E_{0,\text{mean}}}{G_{\text{mean}}}} \quad (4.69)$$

Nelle ipotesi di utilizzo di legno lamellare di conifera si possono adottare, a favore di sicurezza, il rapporto minimo  $E_{0,05}/f_{mk} \approx 330,56$  ed il rapporto massimo  $E_{0,\text{mean}}/G_{\text{mean}} \approx 17,3$  determinabili dalla EN 1194:2002, ottenendo la seguente espressione semplificata per il calcolo delle snellezza relativa a flessione  $\lambda_{\text{rel},m}$ :

$$\lambda_{\text{rel},m} \approx 0,063 \cdot \frac{\sqrt{l_{\text{ef}} \cdot h}}{b} = 0,063 \cdot \frac{h}{b} \cdot \sqrt{\frac{l_{\text{ef}}}{h}} \quad (4.70)$$

Da questa relazione è quindi possibile, tenendo conto anche di quanto riportato in figura 4.9, ricavare la tabella 4.1, che può essere utile come ausilio per la progettazione.

**Tabella 4.1** Valori massimi di  $l_{\text{ef}}/h$  necessari per avere  $k_{\text{crit}} = 1$  (cioè  $\lambda_{\text{rel},m} = 0,75$ ) al variare di  $h/b$ .

$h/b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$l_{\text{ef}}/h$	141,72	35,43	15,75	8,86	5,67	3,94	2,89	2,21	1,75	1,42	1,17	0,98	0,84	0,72	0,63

Nella seconda riga sono riportati, al variare di  $h/b$ , i valori massimi di  $l_{\text{ef}}/h$  necessari per avere  $\lambda_{\text{rel},m} \leq 0,75$ , ovvero  $k_{\text{crit}} = 1$ : con questi valori è possibile stimare rapidamente la distanza massima tra due ritegni torsionali necessaria per evitare una verifica di instabilità di trave.

Nelle figura 4.10 sono riportati in funzione di  $h/b$ , il coefficiente  $k_{\text{crit}}$  di instabilità fles-sotorsionale, al variare dei rapporti di  $l_{\text{ef}}/h$ .

• **Determinazione di  $l_{\text{ef}}$**

Come si è già osservato la lunghezza efficace  $l_{\text{ef}}$  della trave dipende dalla tipologia di carico, dalla posizione in cui è applicato il carico e dalle condizioni di vincolo.

Nella maggior parte dei casi pratici di trave su due o più appoggi diversamente caricata è possibile assumere a favore di sicurezza  $l_{\text{ef}} \approx l$ , dove  $l$  è la distanza tra due ritegni torsionali successivi.

A titolo di esempio riportiamo la relazione proposta dalla norma tedesca DIN 1052:2004 per la lunghezza efficace  $l_{\text{ef}}$ :

$$l_{\text{ef}} = \frac{l}{a_1 \cdot \left[ 1 - a_2 \cdot \frac{a_z}{l} \cdot \sqrt{\frac{B}{T}} \right]} \quad (4.71)$$

dove:

$l$  è la lunghezza della trave

$a_z$  è la distanza del punto di applicazione della forza dal baricentro di sezione (vedi figura 4.11);

$a_1$  e  $a_2$  sono coefficienti tabellati;

$B = E \cdot J_z$  è la rigidezza flessionale attorno all'asse  $z$   
 $T = G \cdot J_t$  è la rigidezza torsionale.

Per una sezione rettangolare si ha

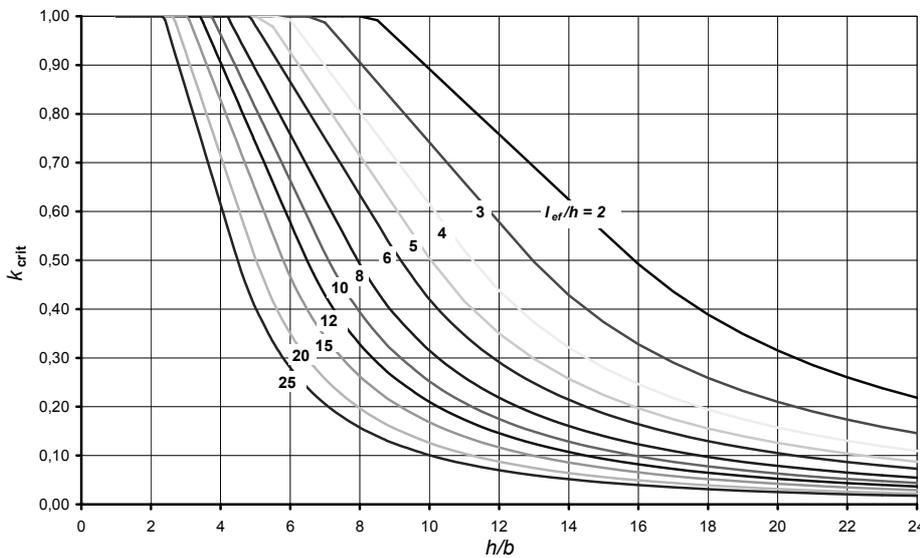
$$B = \frac{E b^3 h}{12} \tag{4.72}$$

$$T = \frac{G b^3 h}{3 \cdot (1 + 0,6 \cdot b/h)} \tag{4.73}$$

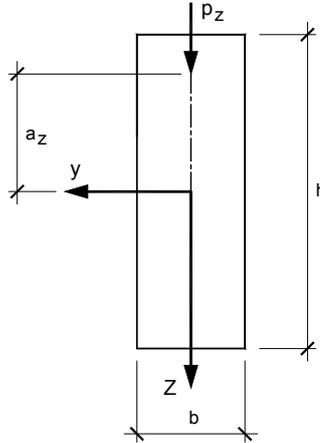
da cui, con una approssimazione ingegneristicamente accettabile per rapporti  $h / b > 4$ , si ottiene la seguente espressione per la lunghezza efficace  $l_{ef}$  :

$$l_{ef} = \frac{l}{a_1 \cdot \left[ 1 - a_2 \cdot \frac{a_z}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{E_{0,mean}}{G_{mean}}} \right]} \tag{4.74}$$

La tabella 4.2 fornisce i valori  $a_1$  e  $a_2$ , per varie configurazioni di vincolo e di carico: per carichi applicati senza eccentricità ( $a_z = 0$ , figura 4.11), si ritrovano immediatamente i valori di  $l_{ef}$  già richiamati in commento all'equazione (4.57).



**Figura 4.10** Curve di instabilità flessotorsionale al variare dei rapporti  $l_{ef}/h$ .



**Figura 4.11** Configurazione della sezione per il calcolo dei coefficienti  $a_1$  e  $a_2$ , nell'ipotesi di centro di carico coincidente con il centro di taglio.

#### 4.1.2.2 Travi pressoinflesse

Nel caso della trave ipotizzata nella trattazione di Prandtl-Michell, se il momento  $M$  è accompagnato da compressione assiale  $P$ , la medesima trattazione analitica svolta per la trave porge, teoricamente, la seguente condizione di equilibrio indifferente:

$$\frac{M^2}{E \cdot J \cdot G \cdot J_{\text{tor}}} + \frac{P}{E \cdot J} = \frac{\pi^2}{l^2} \quad (4.75)$$

Se  $P$  è di trazione il segno positivo diventa negativo; nei casi limite  $P = 0$  o  $M = 0$  si ritrovano, rispettivamente, il momento critico già visto e il carico euleriano. In modo perfettamente duale, si può dire che se  $P = P_{\text{euleriano}}$  si ritrova un momento critico nullo, analogo ragionamento nel caso  $M = M_{\text{cr}}$ , per cui  $P = 0$ .

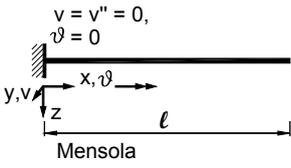
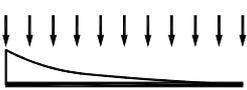
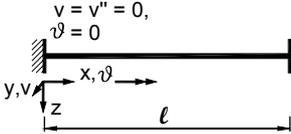
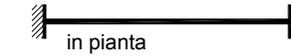
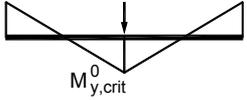
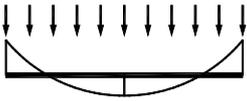
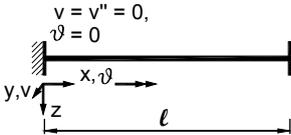
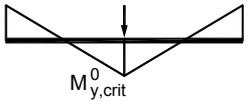
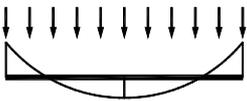
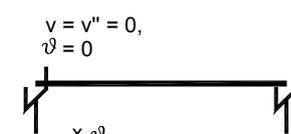
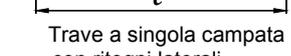
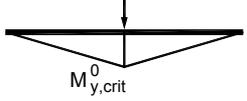
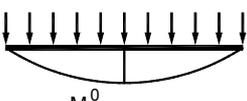
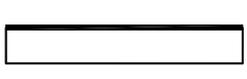
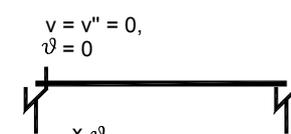
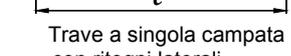
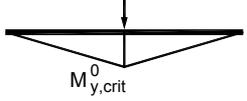
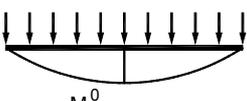
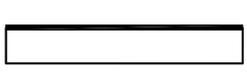
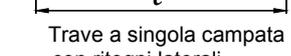
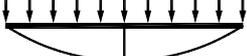
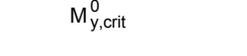
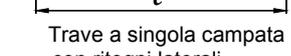
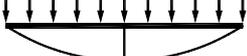
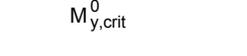
La normativa europea EN 1995:2004 porge, in perfetta sintonia con il caso teorico, un'espressione analoga alla (4.75) nel caso di momento  $M_y$  agente attorno all'asse forte  $y$ , contemporaneamente ad una forza di compressione longitudinale  $N_c$

$$\left( \frac{\sigma_{m,d}}{k_{\text{crit}} \cdot f_{m,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} \leq 1 \quad (4.76)$$

dove

- $\sigma_{c,0,d}$  è la tensione di compressione di progetto;
- $\sigma_{m,d}$  è la tensione di flessione di progetto;
- $f_{c,0,d}$  è la resistenza di progetto a compressione in direzione della fibratura;
- $k_{c,z}$  è il coefficiente introdotto al paragrafo 4.1.1.1.

**Tabella 4.2** Coefficienti di ribaltamento  $a_1$  e  $a_2$  (da tabella E.2 DIN 1052:2004)

Sistema	Andamento del momento	$a_1$	$a_2$
$v = v'' = 0,$ $\vartheta = 0$  Mensola	$M_{y,crit}^0$  	1,27	1,03
$v = v'' = 0,$ $\vartheta = 0$  Trave a doppio incastro  in pianta	 $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$	6,81	0,40
$v = v'' = 0,$ $\vartheta = 0$  Trave intermedia di una trave a più campate  in pianta	 $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$	1,70	1,60
$v = v'' = 0,$ $\vartheta = 0$  Trave a singola campata con ritegni laterali  in pianta	 $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$	1,77	0
$v = v'' = 0,$ $\vartheta = 0$  Trave a singola campata con ritegni laterali  in pianta	 $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$	1,35	1,74
$v = v'' = 0,$ $\vartheta = 0$  in pianta	 $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$	1,13	1,44
$v = v'' = 0,$ $\vartheta = 0$  in pianta	 $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$  $M_{y,crit}^0$	1	0

#### 4.1.2.3 Resistenza di instabilità – Comparazione tra diversi approcci normativi

Il caso di instabilità di elementi pressoinflessi viene affrontato secondo approcci diversi dalle differenti normative. L'approccio della normativa europea è quello di distinguere l'elemento colonna pressoinflessa, nelle formulazioni (4.77) e (4.78), e l'elemento trave pressoinflessa, nella formulazione (4.79).

Secondo tale approccio risulta comunque difficile stabilire *a priori*, o in modo "automatizzato", in quale casistica possa rientrare l'elemento considerato (ovvero se l'elemento pressoinflesso abbia dimensioni geometriche e condizioni di vincolo nelle due direzioni principali tali da essere riguardato come pilastro oppure come trave).

- **Approccio EN 1995:2004**

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (4.77)$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (4.78)$$

$$\left( \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} f_{m,y,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} \leq 1 \quad (4.79)$$

Volendo brevemente commentare tale approccio, confrontandolo poi con i documenti Nicole e DIN 1052:2004, si possono riportare le formule (4.77), (4.78) e (4.79) in un piano coordinato ortogonale  $x$ - $y$ , in cui l'ascissa  $x$  rappresenta il parametro  $\sigma_{m,y,d} / (k_{crit} \cdot f_{m,y,d})$  e l'ordinata  $y$  il parametro  $\sigma_{c,0,d} / (k_{c,z} \cdot f_{c,0,d})$ , nell'ipotesi di momento flettente nel piano debole nullo ( $q_y=0$ , quindi  $\sigma_{m,z,d} = 0$ , si veda la figura 4.7) e per alcune situazioni abbastanza tipiche. Le precedenti disuguaglianze possono essere, quindi, così riscritte come condizioni limiti di verifica

$$\frac{k_{c,z}}{k_{c,y}} y + k_{crit} x = 1 \quad (EC5 a)$$

$$y + k_m k_{crit} x = 1 \quad (EC5 b)$$

$$y + x^2 = 1 \quad (EC5 c)$$

Ipotizzando un elemento di lunghezza  $l$  doppiamente incernierato in entrambe le possibili direzioni di inflessione, si ha

$$l_{0,y} = l_{0,z} = l \quad (4.80)$$

Come si è visto nel paragrafo 4.1.2.1, nella maggior parte delle condizioni di carico si può assumere la lunghezza efficace  $l_{ef}$  della formula di Prandtl-Michell pari alla distanza tra due ritegni torsionali successivi, per cui

$$l_{ef} \cong l \quad (4.81)$$

Assumendo per  $k_{c,y}$  e  $k_{c,z}$  l'espressione data dalla curva di Eulero si può quindi scrivere

$$\frac{k_{c,z}}{k_{c,y}} = \left( \frac{\lambda_{rel,y}}{\lambda_{rel,z}} \right)^2 \quad (4.82)$$

Ricordando le espressioni (4.36) e (4.37) si ha quindi

$$\frac{k_{c,y}}{k_{c,z}} = \left( \frac{\lambda_{rel,z}}{\lambda_{rel,y}} \right)^2 = \left( \frac{h}{b} \right)^2 \quad (4.83)$$

Ricordando l'espressione (4.64) per  $\lambda_{rel,m}$ , ed ipotizzando di lavorare, a favore di sicurezza, con un valore  $l/h \approx 25$ , si ottiene la seguente espressione

$$\lambda_{rel,m} = 0,32 \cdot \frac{h}{b} \quad (4.84)$$

Da queste relazioni è possibile riportare nei grafici di figura 4.12 le espressioni (EC5 a), (EC5 b), (EC5 c), nelle ipotesi di  $h/b = 1$  e  $h/b = 2$ .

I diagrammi di figura 4.12 mostrano quindi che già per valori modesti di snellezza di trave ( $h/b = 2$ ), e per alti valori di  $\sigma_{m,y,d} / (k_{crit} \cdot f_{m,y,d})$  (cioè quando l'elemento è sollecitato maggiormente come "trave" piuttosto che come "pilastro"), l'equazione (EC5 c) diventa determinante nella verifica dell'elemento strutturale.

I documenti Nicole e DIN 1052:2004 propongono invece una formula unificata per elementi snelli in cui sono si introducono contemporaneamente i coefficienti di instabilità di trave e di colonna.

• *Approccio Nicole e DIN 1052:2004*

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (4.85)$$

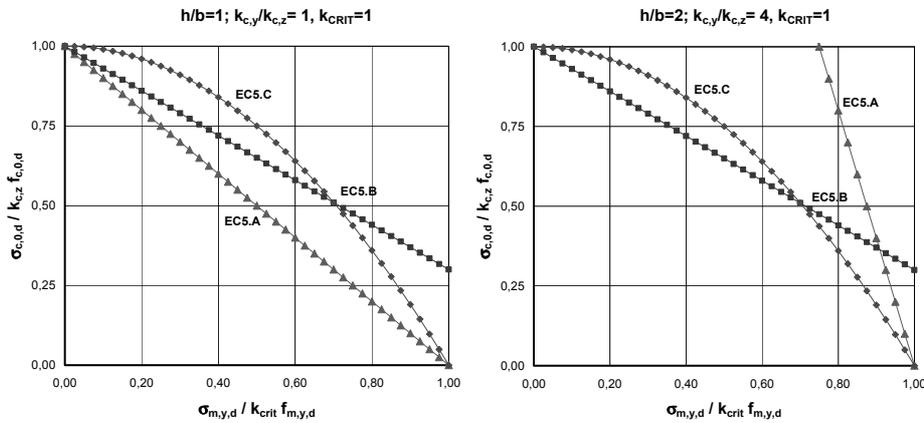
$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (4.86)$$

Anche in questo caso, per una più agevole comparazione, si possono rappresentare tali relazioni nel solito piano coordinato ortogonale  $x-y$ , in cui l'ascissa  $x$  rappresenta il parametro  $\sigma_{m,y,d} / (k_{crit} \cdot f_{m,y,d})$  e l'ordinata  $y$  il parametro  $\sigma_{c,0,d} / (k_{c,z} \cdot f_{c,0,d})$ , nell'ipotesi di momento flettente nel piano debole nullo ( $q_y=0$ , quindi  $\sigma_{m,z,d} = 0$ , si veda la figura 4.7). Si ottengono, quindi, le seguenti condizioni limiti di verifica

$$y + k_m x = 1 \quad (\text{Nicole A})$$

$$\frac{k_{c,z}}{k_{c,y}} y + x = 1 \quad (\text{Nicole B})$$

Per comprendere le differenze tra le formulazioni proposte da Nicole e da DIN 1052:2004, rispetto alle formule in EN 1995:2004, si rappresentano tali relazioni in figura 4.13 nell'ipotesi di momento flettente nel piano debole nullo e di  $h/b = 1$  e  $h/b = 5$ .



**Figura 4.12** Condizioni di verifica secondo l'approccio normativo europeo.

La figura 4.13a illustra come l'approccio dei documenti Nicole e DIN 1052:2004 nel caso di  $k_{c,y} / k_{c,z} = 1$ , cioè nel caso in cui le dimensioni geometriche e le condizioni di vincolo nelle due direzioni principali sono tali per cui l'elemento può essere genericamente definito "pilastro", sia praticamente coincidente con quello della norma EN 1995:2004.

La figura 4.13b illustra invece come l'approccio dei documenti Nicole e DIN 1052:2004 nel caso di  $k_{c,y} / k_{c,z} = 25$ , cioè nel caso in cui le dimensioni geometriche e le condizioni di vincolo nelle due direzioni principali sono tali per cui l'elemento può essere genericamente riguardato come "trave", sia più conservativo per valori più bassi del rapporto  $\sigma_{m,y,d} / (k_{crit} \cdot f_{m,y,d})$  (cioè quando l'elemento è sollecitato maggiormente come "pilastro" piuttosto che come "trave"), mentre per alti valori di  $\sigma_{m,y,d} / (k_{crit} \cdot f_{m,y,d})$  (cioè quando l'elemento è sollecitato maggiormente come "trave") è l'approccio EN 1995:2004 a risultare più conservativo. Occorre tuttavia osservare che, in questo caso, il documento EN 1995:2004 non considera la possibilità di avere momento flettente anche nel piano debole.

### 4.1.3 Travi speciali (travi curve, rastremate e centinate)

Nel presente paragrafo si trattano le travi con *altezza variabile della sezione* o con *asse curvilineo*, per le quali i diversi documenti normativi prescrivono particolari verifiche, proprio perché le loro caratteristiche geometriche e tensionali si discostano da quelle degli elementi semplici visti nei precedenti paragrafi. Per queste ragioni, solitamente, queste tipologie di elementi vengono indicate come *travi speciali*.

Seguendo la classificazione proposta dalla normativa le travi speciali trattate in questo paragrafo sono: le *travi curve*; le *travi rastremate* (a semplice e doppia rastremazione); le *travi centinate*

Queste tipologie di travi sono utilizzate prevalentemente nel caso di coperture (piscine, palazzetti sportivi, capannoni adibiti a vario genere), nei casi in cui si debbano ottenere grandi luci (anche sotto carichi considerevoli), con forme architettoniche diverse da quelle tradizionali. La figura seguente illustra alcuni esempi realizzativi, tra cui quelli trattati in questo paragrafo.

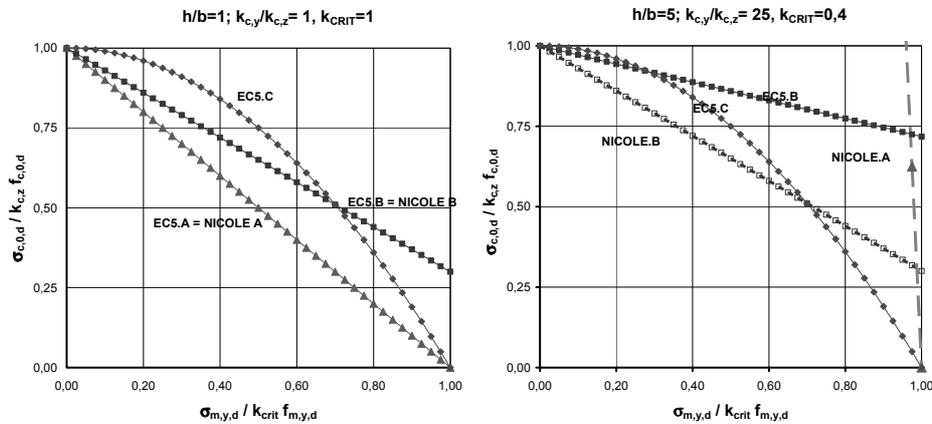


Figura 4.13 Confronto tra diversi approcci normativi.

4.1.3.1 Travi curve

La moderna tecnica del legno lamellare incollato permette la fabbricazione di elementi curvi senza grosse difficoltà produttive: le lamelle vengono piegate elasticamente con la curvatura richiesta ed inserite nei dispositivi di serraggio per il tempo necessario all’incollaggio. Con questa semplice tecnica è possibile ottenere elementi curvi a semplice curvatura (archi), oppure elementi geometricamente più complessi (travi ad “onda” etc.).

Come già evidenziato nel capitolo 1, i limiti di questa tecnica sono da individuare negli stati di coazione indotti dalla curvatura della tavola. Considerando la lamella posizionata all’intradosso dell’elemento curvo di **Errore. L’origine riferimento non è stata trovata.**, le sollecitazioni flessionali agenti ai lembi della tavola possono essere determinate mediante semplici considerazioni elastiche, che portano alla scrittura dell’equazione (1.53), qui richiamata.

$$\sigma_{max} = \left(\frac{t}{r}\right) \cdot \frac{E_{0,mean}}{2} \tag{4.87}$$

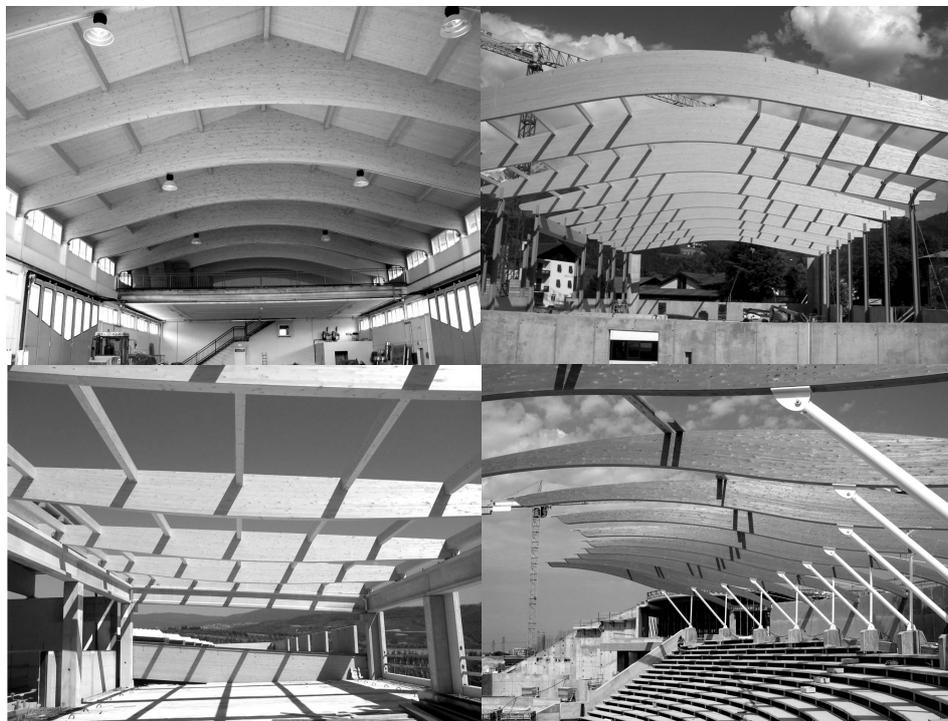
Nella pratica costruttiva è invalsa la regola, tra l’altro derivata da prescrizione contenute nella normativa DIN 1052, di porre un limite massimo al rapporto  $t / r$  pari a

$$\left(\frac{t}{r}\right)_{max} = \frac{1}{200} \tag{4.88}$$

Poiché, come si è visto nel capitolo 1, lo spessore delle lamelle è solitamente pari a 33 mm, da questa prescrizione si può facilmente derivare un valore di raggio interno minimo pari a 6,6 m che si può avere nei tratti curvi di membrature lignee, a meno di non confezionare la trave con lamelle di spessore minore.

La sollecitazione interna flettente massima per lo stato di coazione indotto dalla curvatura, assume, quindi, il seguente valore (ponendo, per esempio,  $E_{0,mean} = 10000$  MPa)

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{t}{r} = \frac{1}{2} \times \frac{10000}{200} \text{ MPa} = 25 \text{ MPa} \tag{4.89}$$



**Figura 4.14** Esempi di realizzazioni con travi di forme differenti da quelle tradizionali (foto Holzbau S.p.a)

Tale valore risulta molto elevato, di fatto paragonabile ai valori caratteristici indicati per la resistenza a rottura per flessione (capitolo 1). Di conseguenza una trave con tale geometria non potrebbe teoricamente sopportare alcun contributo supplementare di sollecitazione.

Tuttavia tali tensioni si riducono in maniera considerevole, in conseguenza dei fenomeni di rilassamento delle tensioni (fluage). In realtà le tensioni residue, che possono comunque essere consistenti, incrementano solo localmente lo stato tensionale, senza quindi modificare sostanzialmente il valore di  $f_m$  relativo alla tabella prestazionale considerata.

Per tali ragioni, a livello normativo, si è inserito solamente un coefficiente  $k_r$ , di riduzione della resistenza flessionale.

Le *sollecitazioni flettenti* agenti su un elemento curvo assumono un andamento iperbolico anziché lineare, come avviene invece nel caso di travi a sezione rettangolare costante. Questo comportamento è facilmente comprensibile considerando il comportamento elastico lineare del materiale ed il principio di conservazione delle sezioni piane. Ragionando infatti su un tratto curvilineo di lunghezza  $dL$  della trave, sottoposto a flessione pura, per il principio della conservazione delle sezioni piane (principio di Bernoulli) si ottiene, a parità di rotazione  $d\theta$  e nell'ipotesi di asse neutro in mezzeria, un allungamento delle fibre d'estradosso uguale in valore assoluto a quello d'intradosso ( $\Delta d l_{\text{ext}} = \Delta d l_{\text{int}}$ ). [...]

**Tabella 4.3** Valori del rapporto  $\sigma_0 / (M/W)$  per tensione di flessione parallela alla fibratura nelle travi curve

$h / \rho_0$	$\rho_0 / h$	Teoria di Winkler-Resal	Teoria dell'elasticità	Formula approssimata DIN 1052:1969	Formula approssimata da normativa (Din1052:2004, Nicole, EN 1994:2004)
0,014	70	1,005	1,005	1,007	1,005
0,02	50	1,007	1,007	1,010	1,007
0,05	20	1,017	1,017	1,025	1,019
0,1	10	1,034	1,035	1,050	1,041
0,2	5	1,071	1,072	1,100	1,094
0,25	4	1,090	1,091	1,125	1,125
0,5	2	1,200	1,203	1,250	1,325
1	1	1,523	1,528	1,500	1,950

• **Formule adottate dalle normative**

La normativa europea EN 1995:2004, la normativa DIN 1052:2004 ed il documento Nicole adottano la seguente formula di calcolo per la tensione di flessione nella zona di colmo per travi curve a sezione rettangolare

$$\sigma_{m,d} = k_1 \frac{6M_{ap,d}}{bh_{ap}^2} \tag{4.90}$$

essendo

$$k_1 = 1 + 0,35 \cdot \left(\frac{h_{ap}}{r}\right) + 0,6 \cdot \left(\frac{h_{ap}}{r}\right)^2 \tag{4.91}$$

e  $h_{ap}$  e  $r$ , nel caso di geometria curva, valgono  $h_{ap}$  =altezza del tratto curvo;  $r = r_{int} + h_{ap}/2$  (corrispondente a  $\rho_0$  nella trattazione fatta in precedenza).

Una precedente versione della norma tedesca DIN 1052 riportava anche la seguente formula semplificata:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} \cdot \left(1 + \frac{h_{ap}}{2 \cdot r}\right) \tag{4.92}$$

essendo  $r$  il raggio medio di curvatura della trave e  $W$  il modulo di resistenza della sezione

$$r = r_{int} + h/2; \quad \frac{1}{W} = \frac{6}{b \cdot h_{ap}^2}$$

La tensione *ortogonale alla fibratura* nella zona di colmo per travi curve a sezione rettangolare viene determinata in accordo con le già citate normative nel modo seguente: [...]

#### 4.1.4 Esempi

Di seguito si illustrano alcuni esempi significativi per il calcolo di elementi strutturali semplici. Per le verifiche di “elemento” si veda quanto riportato nei paragrafi precedenti, mentre per le verifiche di “sezione” quanto è stato riportato nel capitolo 2. La normativa di riferimento per i seguenti esempi è il documento Nicole; tuttavia, per alcune problematiche (come le formule per gli elementi pressoinflessi), verranno illustrate anche gli approcci seguiti da altri documenti normativi. [...]

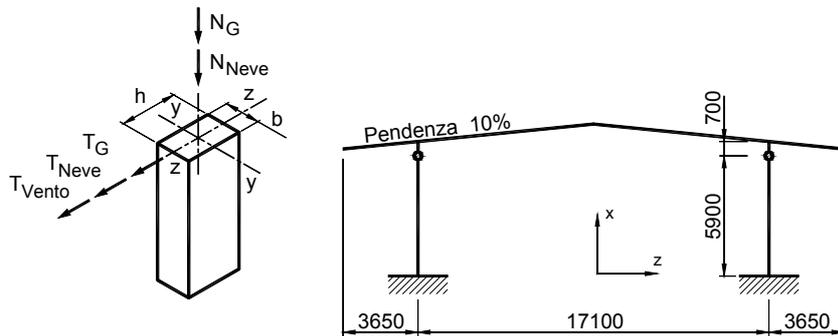


Figura 4.15 Schema statico e carichi agenti.

##### 4.1.4.1 Pilastro

Si consideri la verifica dei pilastri in un capannone industriale realizzato completamente in legno lamellare, la cui struttura principale è rappresentata dal telaio illustrato in figura 4.15. Lo schema statico dei pilastri è quindi quello di asta incastrata alla base e libera in sommità. La trave curva di copertura risulta semplicemente appoggiata ai pilastri tramite appoggi flessotorsionali costituiti da forcelle, ed i carichi orizzontali trasmessi dalla trave al pilastro si considerano agenti ad un'altezza  $h = 6200$  mm dal suolo: tali carichi agiscono nel piano del telaio e sono riconducibili alle azioni verticali (neve e permanenti) ed alle azioni del vento. Inoltre sul pilastro agisce uno sforzo normale di compressione dovuto alle azioni permanenti e della neve.

Pur non essendo molto frequente nella pratica costruttiva, lo schema statico di pilastro incastrato alla base nelle due direzioni può essere ottenuto utilizzando un collegamento alla base con barre incollate, analogamente a quanto illustrato nel capitolo 3.

##### Dati di progetto

- **Sezione**

$$b \times h = 400 \times 568 \text{ mm}; A = 227,2 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$l_0 = 2 \times 5900 = 11800 \text{ mm}$$

$$W_y = 400 \times 568^2/6 = 21,508 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$W_z = 568 \times 400^2/6 = 15,147 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

Si può osservare che la base del pilastro è superiore al limite di produzione pari a 220 mm per gli elementi in legno lamellare (si veda il capitolo 1). Nel caso in esame si considera la

possibilità, talvolta utilizzata nella pratica costruttiva, di incollare tra loro 2 elementi di legno lamellare di sezione  $b \times h = 200 \times 568$  mm.

• **Caratteristiche del materiale**

Legno lamellare GL28c; massa volumica  $\rho_k = 380$  kg/m<sup>3</sup>

Classe di servizio: 2; classe di durata del carico: istantanea  $\rightarrow k_{\text{mod}} = 1,1$

Valori di resistenza

Valori caratteristici		Valori di progetto	
$f_{m,y,k}$ (MPa)	28,31	$f_{m,y,d}$ (MPa)	24,91
$f_{m,z,k}$ (MPa)	30,37	$f_{m,z,d}$ (MPa)	26,72
$f_{t,0,k}$ (MPa)	16,68	$f_{t,0,d}$ (MPa)	14,68
$f_{t,90,k}$ (MPa)	0,40	$f_{t,90,d}$ (MPa)	0,35
$f_{c,0,k}$ (MPa)	24,00	$f_{c,0,d}$ (MPa)	21,12
$f_{c,90,k}$ (MPa)	2,70	$f_{c,90,d}$ (MPa)	2,38
$f_{v,k}$ (MPa)	2,70	$f_{v,d}$ (MPa)	2,38

Valori di modulo elastico

$E_{0,\text{mean}} = 12600$  MPa

$E_{0,05} = 10200$  MPa

$G_{\text{mean}} = 720$  MPa

• **Azioni interne**

Le azioni interne agenti sui pilastri sono:

*Sforzo normale* (valori caratteristici)

$N_G = 135,3$  kN

$N_{\text{neve}} = 689$  kN

*Azioni taglianti* (valori caratteristici)

$T_G = 1,35$  kN

$T_{\text{neve}} = 9,22$  kN

$T_v = 16,55$  kN

Queste azioni sono intese essere agenti ad una altezza pari a  $h = 6200$  mm dal suolo, altezza che non coincide con quella effettiva del pilastro, ma corrisponde al baricentro del punto di applicazione dei carichi orizzontali. I momenti flettenti alla base dei pilastri si possono ottenere semplicemente moltiplicando gli sforzi taglianti per tale altezza  $h$ .

Applicando la seguente combinazioni di carico agli SLU, adottando il carico neve come principale:

$$\gamma_g G_k + \gamma_q Q_{1k} + \gamma_q \psi_{02} Q_{2k}$$

(nel caso di carico da neve e da vento, la normativa italiana prescrive  $\psi_{02} = 0,7$ ).

La combinazione di carico più gravosa è quella che ha il carico da neve come carico variabile principale. Si ottiene quindi:

$$N_d = 1,35 \times 135,3 + 1,5 \times 689 = 1216,2 \text{ kN}$$

$$T_{d,z} = 1,35 \times 1,35 + 1,5 \times 9,22 + 1,5 \times 0,7 \times 16,55 = 33,1 \text{ kN}$$

ottenendo quindi il seguente valore per il momento flettente di progetto intorno all'asse y-y:

$$M_{d,y} = 33,1 \times 6,2 = 205,22 \text{ kNm}$$

da cui si ottiene il seguente valore della sollecitazione flettente:

$$\sigma_{m,y} = \frac{M_{d,y}}{W_y} = \frac{205,22}{21,508} = 9,54 \text{ MPa}$$

ed il seguente valore della sollecitazione assiale:

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_d}{b \times h} = \frac{1216,2}{227,2} = 5,35 \text{ MPa}$$

### Verifiche SLU: resistenza

Poiché  $\sigma_{m,z} = 0$ , si ottiene che la verifica più severa a pressoflessione risulta:

$$\left( \frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1$$

quindi:

$$\left( \frac{5,35}{21,12} \right)^2 + \frac{9,54}{24,91} = (0,25)^2 + 0,38 \cong 0,45 < 1$$

### Verifiche SLU: stabilità

Si calcolano dapprima i raggi giratori nelle due direzioni principali:

$$i_y = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{568}{\sqrt{12}} \cong 164 \text{ mm}$$

$$i_z = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{400}{\sqrt{12}} \cong 115 \text{ mm}$$

Date le condizioni di vincolo del pilastro, la lunghezza libera di inflessione è la medesima nelle due direzioni:

$$l_{0,y} = l_{0,z} = l_0 = 2 \cdot l = 2 \times 5900 = 11800 \text{ mm}$$

Le snellezze dei pilastri nelle due direzioni principali sono

$$\lambda_y = \frac{l_0}{i_y} = \frac{11800}{164} \cong 72$$

$$\lambda_z = \frac{l_0}{i_z} = \frac{11800}{115} \cong 102$$

Le snellezze relative dei pilastri possono essere determinate come segue:

$$\lambda_{\text{rel},y} = \frac{72}{\pi} \sqrt{\frac{24}{10200}} \cong 1,11$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{102}{\pi} \sqrt{\frac{24}{10200}} \cong 1,58$$

I coefficienti di tensione critica  $k_c$  risultano

$$k_{c,y} = \frac{1}{k_y + \sqrt{k_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}} = \frac{1}{1,15 + \sqrt{1,15^2 - 1,11^2}} \cong 0,70$$

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}} = \frac{1}{1,80 + \sqrt{1,80^2 - 1,58^2}} \cong 0,38$$

I coefficienti  $k_z$  e  $k_y$  sono stati ricavati utilizzando, in accordo con il documento Nicole,  $\bar{\lambda}_{rel} = 0,5$

$$k_y = 0,5 \times (1 + 0,1 \times (1,11 - 0,5) + 1,11^2) \cong 1,15$$

$$k_z = 0,5 \times (1 + 0,1 \times (1,58 - 0,5) + 1,58^2) \cong 1,80$$

Poiché  $\sigma_{m,z} = 0$ , per la verifica di stabilità secondo il documento Nicole si ha

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} f_{m,y,d}} \leq 1$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} f_{m,y,d}} \leq 1$$

Il coefficiente di sbandamento laterale  $k_{crit}$  è assunto unitario visto che la sezione è molto tozza (essendo il rapporto  $h / b \approx 1,42$ ). Se si assume  $l_{ef} = l$ , infatti, si può verificare come risulti ampiamente  $\lambda_{rel,m} < 0,75$

$$\lambda_{rel,m} = 0,063 \cdot \frac{h}{b} \cdot \sqrt{\frac{l_{ef}}{h}} \cong 0,28 < 0,75$$

Quindi la verifica di stabilità secondo il documento Nicole impone ( $k_{crit} = 1$ )

$$\frac{5,35}{0,38 \times 21,12} + 0,7 \times \frac{9,54}{24,91} \cong 0,67 + 0,27 = 0,94 \leq 1$$

Adottando invece per le verifiche di stabilità la normativa europea EN 1995:2004 si hanno le seguenti disequazioni, risultando  $\sigma_{m,z} = 0$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + \left( \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \right)^2 \leq 1$$

Assumendo  $k_{c,z}$  e  $k_{c,y}$  pari rispettivamente a 0,37 e 0,67 (i coefficienti  $k_z$  e  $k_y$  valgono in questo caso rispettivamente 1,81 e 1,16, essendo stati ricavati, in accordo con la norma europea, utilizzando  $\bar{\lambda}_{rel} = 0,3$ ), si ha quindi

$$\frac{5,35}{0,67 \times 21,12} + \frac{9,54}{24,91} \cong 0,38 + 0,38 = 0,76 \leq 1$$

$$\frac{5,35}{0,37 \times 21,12} + 0,7 \times \frac{9,54}{24,91} \cong 0,68 + 0,27 = 0,95 \leq 1$$

$$\frac{5,35}{0,37 \times 21,12} + \left( \frac{9,54}{24,91} \right)^2 \cong 0,68 + 0,14 = 0,82 \leq 1$$

Si lascia al Lettore la verifica di taglio alla base del pilastro. [...]